数理解析研究所講究録
398巻 1980年 1-30

A Graph Theory for C*-algebras

天王寺高校　　榎本雅俊
大阪教育大学　　藤井正俊
大阪教育大学　　綿谷安男

1. はじめに。最近，A. Connes, P. Hahn, J. Renault 等が中心となり、operator algebra に対する groupoid による接近を行なっている。そこでは、すべての operator algebra は groupoid により構成されるかという問題がある。この種の研究は，operator algebra の general theory といえる。他方，simple C*-algebra の構造を研究する為に、具体的な simple C*-algebra がくわしく調べられ始めている。その一例は AF-algebra である。また，Pimsner, Popa は，最近脚光を浴びている irrational rotation algebra をこの中に埋め込んで，その構造を解析している。もう1つの具体的な例として，ergodic theory からの要請により，Cuntz と Krieger が導入した C*-algebra がある。それは，topological Markov chain に関連して考察されている。この AF-algebra と Cuntz-Krieger による algebra には groupoid による接近がある。ここでは，combinatorial theory

$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \longmapsto \begin{matrix} x = X \\ x^d y = Y \end{matrix} \quad xy$

において，1つの中心をなしている graph theory を用いて，simple C*-algebra を調べる。主な対象物は，後者の方であるが，groupoid及びgraphによるC*-algebraへの接近は，最終的には，categoricalな接近にまとめられることと思われる。

以下，内容を項目の順に述べる。

1. はじめに
2. graphの基礎的な概念とCuntz-Krieger algebraの代数的構造
3. "gauge"作用を通して見たCuntz-Krieger algebra
4. sub-Fock representationによるCuntz-Krieger algebraのextensionとその応用
5. digraph上のfree categoryからみたCuntz-Krieger algebraのextensionとadjoint graph
6. Weak extension group
7. 3×3行列におけるsimple Cuntz-Krieger algebraの分類
8. 補遺

内容を紹介する。2では，graphの基礎的概念とCuntz-Krieger algebraとの代数的構造とがどのように結びつくかを説明する。

3では，"gauge"作用とのかかわり合いを示す。2と3で述べることを表にまとめると次のようになる。

graph 理論	C^*-algebra 理論
連結成分	直和成分
凝縮graphの順序ideal	* ideal
強連結(行列の既約)	simple algebra
初等有向閉路C_kの存在	周期がkでないgauge変換はouter
非周期性	gauge変換群$\mathbb{T}$はouter aut. gr.
(k−1)有向道グラフ	周期kのgauge変換のfixed point alg.
初等有向閉路C_kによるデカルト積 $G\times C_k$	周期kのgauge変換によるcrossed product
$G\times C_k$の回転変換	crossed product上のdual action
covering map	expectation

4では，Evans [17], Katayama による結果を拡張する。彼らは Cuntz algebra の extension を Full-Fock space 上に表現することに成功した。我々は，これを Cuntz-Krieger algebra の extension の場合にまで一般化する。このことの応用として，Cuntz-Krieger algebra の generators の間のある種の map が，その algebra 上の automorphism に拡張出来る為の条件を決定する。

5では，前節とは違った観点から，Cuntz-Krieger algebra の extension の表現を考える。digraph 上の free category 上の C^*-algebra としてとらえるのである。この時，adjoint graph の考え

が有効に働く。

6.では、任意のfinitely generated abelian group Hに対して、separable simple, unital C^*-algebra Aが存在して、$\mathrm{Ext}^w(A)$がHに同型になることを示す。

7.では、Cuntz-Krieger algebraの分類問題を考察する。K_0-群の精密化としてのmarkerという概念を用いて、我々は、3×3行列の場合については、完全な結果を得ている。

8.では、関連した話題を扱う。

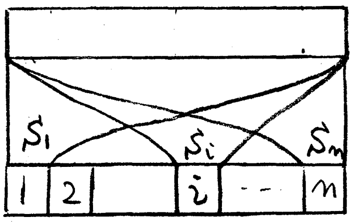
$\boxed{2}$ graphの基礎的な概念とCuntz-Krieger algebraの代数的構造

J. Cuntz [4]は、1977年にCMPに出た論文の中で、次のようなC^*-algebraを調べた。n個のisometries $S_1, \cdots, S_n$で、$\sum_{i=1}^n S_i S_i^* = 1$をみたすものを取り、これらにより生成される$C^*$-algebraのclassを考える。この時、これらのC^*-algebrasは、generatorsの取り方によらず、一意に決まり、単純であることがわかる。

Cuntz

$\mathcal{O}_n$

彼は、このC^*-algebraの同型類を$\mathcal{O}_n$という記号で表した。$\mathcal{O}_n$を



図で考えてみると、これは空間をn個に分けて、全体からS_1のrange空間にS_1、----、全体からS_nのrange空間にS_nという状況になっている。これに続いて、CuntzとKrieger [10]は、1980年、topological Markov chainに対応する新しいC^*-algebraのclassを導入した。それは次のようなものであった。

Cuntz-Krieger $\mathcal{O}_A$

Σを有限集合として，行列$A=(A(i,j))_{i,j\in\Sigma}$を取る。ここで，$A(i,j)\in\{0,1\}$であり、Aのどの行もどの列も0ではないものとする。この行列Aに対して，次の条件[A]をみたす partial isometries $s_i\neq 0\ (i\in\Sigma)$を取る。$Q_i=s_i^*s_i,\ P_i=s_is_i^*$とした時、

条件[A]　$P_iP_j=0\ (i\neq j),\ Q_i=\sum_{j\in\Sigma}A(i,j)P_j\ \ (i,j\in\Sigma)$.

条件[A]をみたす$\{s_i\}$達により生成される C*-algebra を作る。

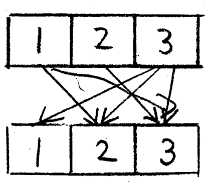
このalgebraは，行列Aがある条件をみたせば [A]の条件だけで，Cuntz algebraのように一意的に決まる。この一意的に決まるalgebraを，以下，Cuntz-Krieger algebra $\mathcal{O}_A$と呼ぶことにする。

上の条件を，例について，調べてみる。

__例1__. $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$を取る。条件[A]は，行列でかくと，

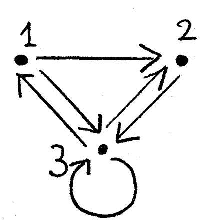
$$\begin{pmatrix}s_1^*s_1\\s_2^*s_2\\s_3^*s_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q_1\\Q_2\\Q_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_1\\P_2\\P_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s_1s_1^*\\s_2s_2^*\\s_3s_3^*\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}s_1^*s_1=s_3s_3^*\\s_2^*s_2=s_1s_1^*+s_3s_3^*\\s_3^*s_3=s_1s_1^*+s_2s_2^*+s_3s_3^*\end{cases}$$

ということである。又，P_1,P_2,P_3の range spaces を1,2,3で表わしておくと，partial isometries s_1,s_2,s_3は右の図の矢印で表わされる。



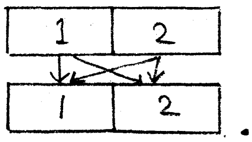
$$\begin{pmatrix}&1&1\\&&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

range spaces と partial isometries の上の図から，次の graph を得る。

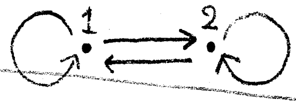


6 $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & \end{pmatrix}$, $S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & \end{pmatrix}$

<u>例2</u> Cuntz-algebra $\mathcal{O}_2$ を上と関連させてみる。$S_1^*S_1=Q_1=1$, $S_2^*S_2=Q_2=1$, $S_1S_1^*=P_1$, $S_2S_2^*=P_2$, $S_1S_1^*+S_2S_2^*=1=P_1+P_2$ より、行列で表わすと、$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$ である。又、range spaces の間の矢印の図で表わすと、



.

graph でかくと、 で表わされる。

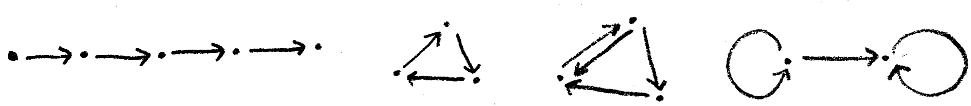
つまり、Cuntz algebra $\mathcal{O}_2$ は、行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対応する Cuntz-Krieger algebra である。

ここでは、Cuntz-Krieger algebra $\mathcal{O}_A$ を graph 理論の観点から取り上げていく。その為に、graph 理論の用語を準備する。

① G が directed graph（有向グラフ）とは、G が次の3つ組（$V(G)$, $E(G)$, δ）である時をいう。$V=V(G)$ は vertices（頂点）の集合、$E=E(G)$ は edges（辺）の集合、接続写像 $\delta: E \longrightarrow V\times V$, $x \mapsto (\delta_1(x), \delta_2(x))$
range domain

（つまり、$2 \xleftarrow{x} 1$ のとき、$\delta_1(x)=2$ … edge x の終点は 2、$\delta_2(x)=1$ … edge x の始点は 1）である。

<u>例3</u> directed graph の例は次のようなものである。

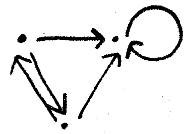


② G が <u>digraph</u> とは、G は directed graph で、どの2つの vertices の組 (i,j) に対しても、$i \longleftarrow j$ となる edges は高々1つの

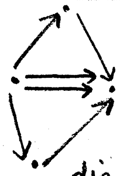
$$V\times V \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}_2 \quad \Big| \quad \varphi(i,j)=\begin{cases}0 & (i \quad j)\\ 1 & (i \leftarrow j)\end{cases}$$

ときをいう。(この高々1つの辺を、(i,j)と同一視する)。

例4



digraph



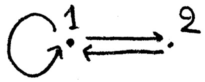
digraphではない。

③ digraph G の adjacency matrix (隣接行列) $A=(A(i,j))$ とは、

$$A(i,j)=\begin{cases}1 & (i \longleftarrow j \text{ がある})\\ 0 & (i \longleftarrow j \text{ がない})。\end{cases} \qquad A=\left(\varphi(i,j)\right)_{i,j}$$

この対応で digraph G と 0-1 matrix を適当に同一視する。

例5

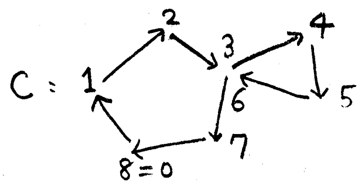
G:  $\Longleftrightarrow \quad A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

④ 長さが $q>0$ の directed path (有向道) P とは、q個の edges の組で、向き順につながっているもののことである。

例6 長さ5の directed path $\quad 0 \longleftarrow 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \longleftarrow 4 \longleftarrow 5$

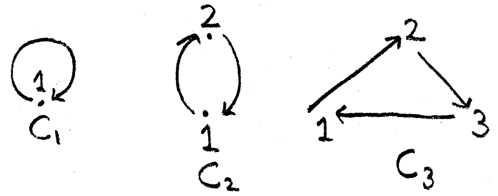
$P=((0,1),(1,2),\cdots,(4,5))$, Pの長さ $=n(P)=5$ … edgesの数

⑤ directed cycle (有向閉路) C とは、C は directed path で、始点と終点が一致するもののことである。

例7 C:  $n(C)=8$ ← 途中で頂点が重なってもよい

⑥ elementary directed cycle C_k (k-cycle) とは、$n(C_k)=k$ である directed cycle で、途中では頂点が重ならないもののことである。

elementary directed cycles

例8 

以上の準備のもとで，[A]条件をみたす C^*-algebra が一意になる条件を graph の言葉で述べる。

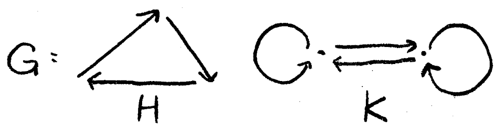
$\Sigma = V(G)$ として，$V_0 \subset \Sigma$ を次で定義する。vertex $i \in V_0$ とは，i を通る異なる elementary directed cycle が2つ以上あることである。この時，G が(I)条件をみたすとは，

[任意の vertex j に対して directed path $j \leftarrow j_1 \leftarrow \cdots \leftarrow j_K \leftarrow i$ で始点 $i \in V_0$ となるものが存在する時にいう。

0-1 matrix A と digraph G を同一視することにして，G が(I)条件をみたすとき，Cuntz-Krieger [10] は [A]条件をみたす C^*-algebra が一意になることを示した。以下，これを $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_G$ で表わしていくことにする。

注意　以下では，G は常に，(I)条件をみたすものとする。

⑦ vertices i と j が連結している $(i \sim j)$ とは，i と j が undirected path で結ばれているときにいう。graph G をこの同値関係 $\sim$ で分けた同値類を，connected component という。

例9 

G の connected component は，H と K であり，G は H と K の和である。この graph の和に対応するのが C^*-algebra の直和である。つまり，$\mathcal{O}_G = \mathcal{O}_{H \cup K} = \mathcal{O}_H \oplus \mathcal{O}_K$.

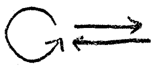
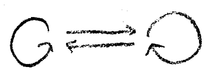
{oriented graph} ⊃ {digraph} ⟷ 0,1行列 A ⟶ C*代数 $\mathcal{O}_A$] Cuntz-Krieger algebra

9

⑧ vertices i と j が，$\boxed{強連結している(i \approx j)}$ とは，i から j へと，j から i への directed path が両方あることをいう。G の vertices $V(G)$ をこの同値関係 $\approx$ で分けた同値類を strongly connected component という。G の vertices のすべての pairs が strongly connected の時に，G を strongly connected という。（このことは connected の時も同様である）

G が strongly connected でない場合には，$\mathcal{O}_G$ には，$*$ ideals が存在するが，そのありさまは，おおよそ，graph G の condensation graph（凝縮グラフ）$C(G)$ の order ideal により記述される。digraph G の condensation graph $C(G)$ とは，$C(G)$ の vertices は $V(G)$ の strongly connected component $C_1, C_2, \cdots, C_K$ であり，$C(G)$ の edges $C_\ell \longleftarrow C_m$ とは，ある $i \in C_\ell$，ある $j \in C_m$ があって，$i \longleftarrow j$ in G の時をいう。この対応関係については，Cuntz [5] にくわしく述べられている。

[3] "gauge"作用を通して見た Cuntz-Krieger algebra.

我々は，[13] において，$U(n) \hookrightarrow \mathrm{Out}\,\mathcal{O}_n$（ここで，$U(n)$ は $n \times n$ unitary matrices の作る群）を，$\alpha_u(S_j) = \sum_{i=1}^{n} u_{ij} S_i$ で表現したが，Cuntz-Krieger algebra $\mathcal{O}_A$ の時には，$U(n)$ の元は一般にはこの表現では作用し得ない。2×2 行列の時， と  のみが，(I) 条件をみたす。automorphisms は，この表現では，前者は，

$\mathbb{T}\oplus\mathbb{T}$, 後者は, $U(2)$ となる。そこで, Cuntz-Krieger algebra の場合には, "gauge"作用を調べることが問題になる。

$\mathcal{O}_G = C^*(s_1,\cdots,s_n)$ 上に, "gauge"変換 $\alpha:\mathbb{T}\longrightarrow \mathrm{Aut}\,\mathcal{O}_G$ を $\alpha_t(s_i)=ts_i$ で定義する。この時, α_t の outerness が, digraph G の形から, 次のように表わされる。

<u>定理</u> (I)条件をみたす digraph G が, elementary directed cycle C_k (k-cycle) をもつならば, $t^m \neq 1$ ($t\in\mathbb{T}$) に対して, α_t は $\mathcal{O}_G$ 上の outer automorphism である。

証明は, Archbold [1] の modification による。

このことの結果として,

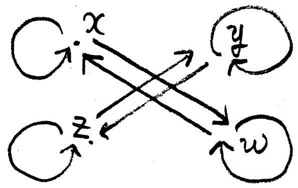
<u>系</u> すべての Cuntz-Krieger algebra $\mathcal{O}_G=\mathcal{O}_A$ は outer automorphism をもつ。

以下 "gauge"作用が Cuntz-Krieger algebra にどのように影響を及ぼすかを fixed point algebra の場合に見てみる。まず, 次の graph の概念を導入する。G の k-path graph (k-有向道グラフ) $W_k(G)$ とは, G の長さ k の directed paths が $W_k(G)$ の vertices で, それらが長さ1の directed path を介して結ばれる時, $W_k(G)$ の点として結ばれるとする。

<u>例10</u> 1-path graph

$G:\quad 1 \underset{z}{\overset{x}{\rightleftarrows}} 2 \underset{w}{\overset{y}{\rightleftarrows}} 3$

$W_1(G)$:



この k-path graph を使うと，次の定理を得る。

<u>定理</u>　α を period 2 の "gauge" 変換 $\alpha(S_i) = -S_i$ $(\alpha \in \mathrm{Aut}\, \mathcal{O}_G)$ とする。この時，fixed point algebra $\mathcal{O}_G^{\alpha}$ は，$\mathcal{O}_{\varpi_1(G)}$ に同型である。

この定理によれば，例12 の G に対して，$\mathcal{O}_G^{\alpha_{-1}} = \mathcal{O}_2 \oplus \mathcal{O}_2$ である。$\mathcal{O}_G$ の場合には，"gauge" automorphism は，Cuntz algebra の時とは違った振舞をする。G の形状によっては，"gauge" automorphism の outerness がこわれてしまうのである。

次に，α_{-1} の innerness に対する判定条件を述べる。

<u>定理</u>　G を strongly connected，$\alpha \in \mathrm{Aut}\, \mathcal{O}_G$ を，$\alpha(S_i) = -S_i$ とする時，次は同値である。

① α_{-1} は inner である。　② G のどの directed cycle も長さが偶数である。　③ 1-path graph $\varpi_1(G)$ は connected でない。

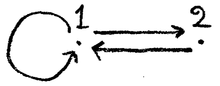
④ $\mathcal{O}_G^{\alpha}$ は simple でない。

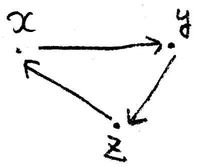
④ $\Rightarrow$ ① の証明は，$\mathcal{O}_G$ が simple，$\mathcal{O}_G^{\alpha_{-1}}$ が not simple とすると，Pedersen [23, Th. 8.10.12] より，α_{-1} の innerness が出る。

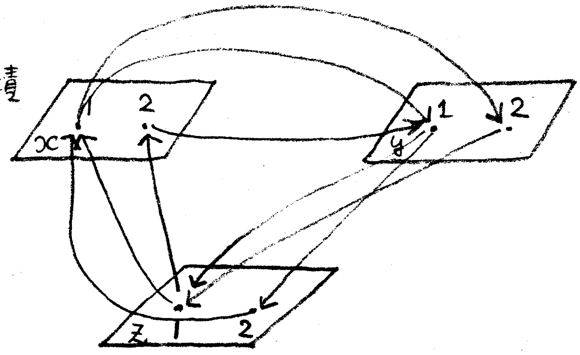
次に，period k の "gauge" 変換から crossed product を作った時，graph の方ではどのような変化が起きるかを調べる。その前に、graph のデカルト積を定義する。graph G と elementary directed cycle C_k とのデカルト積を $\nabla(G \times C_k) = \nabla(G) \times \nabla(C_k)$ で，

edgesは両方のverticesがつなげる時につなぐことで決める。

<u>例11</u>

G :


C_3 :


デカルト積
$G\times C_3$


この時，period k の"gauge"変換によるcrossed productについて、次の結果を得る。これは，Cuntz-Evansの結果の1つの一般化である。

定理 $\alpha(S_i)=e^{\frac{2\pi i}{k}}S_i$ なるperiod k のautomorphism $\alpha\in\mathrm{Aut}\,\mathcal{O}_G$ によるcrossed product $\mathcal{O}_G\times_\alpha\mathbb{Z}_k$ は，$\mathcal{O}_{G\times C_k}$ に同型であり，dual action $\hat{\alpha}$ は，$G\times C_k$ のずらし回転である。

この定理の系として、次を得る。

系 G をstrongly connected, $\alpha\in\mathrm{Aut}\,\mathcal{O}_G$ を $\alpha(S_i)=e^{\frac{2\pi i}{k}}S_i$ とする時，$\mathcal{O}_G\times_\alpha\mathbb{Z}_k$ がsimpleであることと，$d(G)$ と k が互いに素であることとが同値である。(ここで，$d(G)$ は，G のperiodである)。

$\boxed{4}$ sub-Fock representationによるCuntz-Krieger algebraのextensionとその応用.

Evans [17], Katayamaは，Cuntz algebraのextensionを次の

ように，Full Fock space 上に表現した。H^n を n dimensional Hilbert space，Ω を Fock vacuum unit vector とする。$F(H) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \oplus H_m$（ここで，$H_m = \otimes^m H$，$H_0$ は Fock vacuum unit vector により generate される 1-dimensional Hilbert space）とおく。この時，

任意の $f \in H$ に対して、

$$a(f)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) \equiv f \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$$

$$a(f)\Omega = f.$$ とおけば，

$$a(f)^*(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = (f_1 | f) f_2 \otimes \cdots \otimes f_n$$

$$a(f)^*\Omega = 0.$$

$F(H)$ 上のこれらの bounded operators $\{a(f) \mid f \in H\}$ により generate された C^*-algebra は，Watatani [25] による Clifford C^*-algebra $\mathcal{P}_n$ と同型であり，Cuntz algebra $\mathcal{O}_n$ の $C(F(H))$（$F(H)$ 上の compact operators 全体の作る algebra）による extension である。つまり，次の short sequence が exact になる。

$$0 \longrightarrow C(F(H)) \longrightarrow \mathcal{P}_n \longrightarrow \mathcal{O}_n \longrightarrow 0.$$

この事を $\mathcal{O}_A$ の場合に一般化する。$A = (A(i,j))$ を n 行 n 列の 0-1 行列として，どの行もどの列も 0 ではないとする。又，A に対応する graph は，(I) 条件をみたすとする。

subspace $L \subset F(H)$ をみつけて，

$$0 \longrightarrow C(L) \longrightarrow \mathcal{P}_A \longrightarrow \mathcal{O}_A \longrightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

になるような subspace $L (\subset F(H))$ 上の $\mathcal{O}_A$ の extension algebra $\mathcal{P}_A$ を作ることを目標にする。

$\{e_1,\cdots,e_n\}$ を n-dimensional Hilbert space H の orthonormal base とする。$\mathcal{L}_m$ を $\{e_{i(1)}\otimes\cdots\otimes e_{i(m)}\,;\,A(i(k),i(k+1))=1 \text{ for } 1\leqq k\leqq m-1\}$ により generate される H_m の subspace とする。$\mathcal{L}\equiv\sum_{m=0}^{\infty}\oplus\mathcal{L}_m$ (ここで, $\mathcal{L}_0=H_0$, $\mathcal{L}_1=H_1=H$) とおく。また, $\mathcal{M}_m$ を $\{e_{i(1)}\otimes\cdots\otimes e_{i(m)}\,;\,\prod_{k=1}^{m-1}A(i(k),i(k+1))=0\}$ により generate される H_m の subspace とする。$\mathcal{M}\equiv\sum_{m=0}^{\infty}\oplus\mathcal{M}_m$ (ここで, $\mathcal{M}_0=\mathcal{M}_1=0$) とおく。$\mathcal{F}(H)=\mathcal{L}\oplus\mathcal{M}$ となり, $\mathcal{L}$ を A に対応する sub-Fock space と呼ぶことにする。

$S_i\equiv P_{\mathcal{L}}\,a(e_i)|_{\mathcal{L}}$ ($P_{\mathcal{L}}$ は $\mathcal{L}$ 上への projection) とおく。$\mathcal{P}_A$ で, $\{S_i\,;\,1\leqq i\leqq n\}$ により generate される C^*-algebra を表わす。この時, 次の定理が成り立つ。

<u>定理</u>　$\mathcal{P}_A$ は $\mathcal{L}$ 上で irreducible であり, $\mathcal{L}$ 上の compact operators の作る algebra $C(\mathcal{L})$ を含む。更に, 次の short sequence は exact である。

$$0\longrightarrow C(\mathcal{L})\longrightarrow\mathcal{P}_A\longrightarrow\mathcal{O}_A\longrightarrow 0$$

証明には, 次の補題1,2を必要とする。

<u>補題1</u>　$S_k=P_{\mathcal{L}}\,a(e_k)|_{\mathcal{L}}$ は, 次の性質をみたす partial isometries である。

$S_k^*S_k\Omega=\Omega$, $S_kS_k^*\Omega=0$.　すべての $e_{i(1)}\otimes\cdots\otimes e_{i(m)}\in\mathcal{L}$ について,

$$S_k^*S_k(e_{i(1)}\otimes\cdots\otimes e_{i(m)})=A(k,i(1))\,e_{i(1)}\otimes\cdots\otimes e_{i(m)}$$

$$S_kS_k^*(e_{i(1)}\otimes\cdots\otimes e_{i(m)})=\delta_{k,i(1)}\,e_{i(1)}\otimes\cdots\otimes e_{i(m)}\text{。}$$

補題2　Eを$L_0 = H_0$上のprojectionとすると、
$$S_k^* S_k = \sum_{j=1}^{n} A(k,j) S_j S_j^* + E.$$

残りの$\mathcal{O}_A$がLにirreduciblyにactするのは、次の方法による。non-zero $x \in L$に対して、その直和因子$x_m = \sum x_m(i(1), \cdots, i(m)) \times e_{i(1)} \otimes \cdots \otimes e_{i(m)}$でnon-zeroなものをとり、$x_m(i(1), \cdots, i(m)) \neq 0$を更に取る。$x_m(i(1), \cdots, i(m))^{-1} S_{j(1)} \cdots S_{j(h)} E S_{i(m)}^* \cdots S_{i(1)}^* x = e_{j(1)} \otimes \cdots \otimes e_{j(h)}$.
これで定理が示せたことになる。

以下では、上の定理の応用について論じる。我々は、Archbold [1]の結果を拡張して、$\mathcal{O}_n$上のouter automorphism group $U(n)$について論じた。ところが、$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$の場合に、$\alpha_u$が$\mathcal{O}_A$のautomorphismに拡張出来る為には、$u = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$が必要十分である。それでは、$\alpha_u$が一般の$\mathcal{O}_A$上のautomorphismに拡張出来る為のunitary matrices uの満たす条件は何だろうか？

$u \in U(n)$として、H_0上で$U_0 = 1$, H_m上で、$U_m = \otimes^m u \ (m \geq 1)$とする。$F(H)$上で、$F(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \oplus U_m$とする。この時、$F(u)$は、$F(H)$上のunitary operatorである。Evans [17]とKatayamaは、$F(u)$が$\mathcal{P}_n = C^*(a(e_i); 1 \leq i \leq n)$上のautomorphism β_u（ここで、$\beta_u(a(e_i)) = F(u) a(e_i) F(u)^* = \sum_k u_{ki} a(e_k)$）をimplementすることを示した。ここで、先に、sub-Fock space Lが$F(u)$をreduceする$u \in U(n)$の条件を考える。

補題 $A=(A(i,j))$ を $A(i,j)\in\{0,1\}$ なる $n\times n$ matrix, $u=(u_{ij})$ を unitary matrix で, $A(i,j)=0$, $A(k,m)=1$ ならば $u_{ki}u_{mj}=0$ $(1\leq i,j,k,m\leq n)$ をみたすものとする。この時, A に対応する sub-Fock space $\mathcal{L}$ は $F(u)$ を reduce する。

この補題を用いて, α_u が $\mathcal{O}_A$ 上の automorphism に拡張出来る条件を示す。

定理 $\mathcal{O}_A=C^*(T_1,\cdots,T_n)$ とする。この時, $u\in\mathcal{U}(n)$ に関する次の条件は同値である。

(1) $\alpha_u(T_i)=\sum_k u_{ki}T_k$ は, $\mathcal{O}_A$ 上の automorphism に拡張出来る。

(2) $(1-A(i,j))A(k,m)u_{ki}u_{mj}=0$ $(1\leq i,j,k,m\leq n)$

(3) $A(i,j)=0$, $A(k,m)=1$ ならば $u_{ki}u_{mj}=0$ $(1\leq i,j,k,m\leq n)$

この定理の系として, 次を得る。

系 $\mathcal{O}_A=C^*(T_i\,;\,1\leq i\leq n)$ とする。この時, $\mathcal{O}_A=\mathcal{O}_n$ であることは, すべての $u\in\mathcal{U}(n)$ に対して, α_u が $\mathcal{O}_A$ 上の automorphism に拡張出来ることと必要十分である。

digraph G が, adjacency matrix A により表現されているとして, G の vertices i と j が <u>equivalent</u> であるということを, すべての $k\in V(G)$ について, $A(i,k)=A(j,k)$, $A(k,i)=A(k,j)$ が成り立つことで定義する。この時, この equivalent を使って, この定理のもう1つの系を得る。

系 $V(G)=\{1,2,\cdots,n\}$ である digraph G で, $1,2,\cdots,m$ が

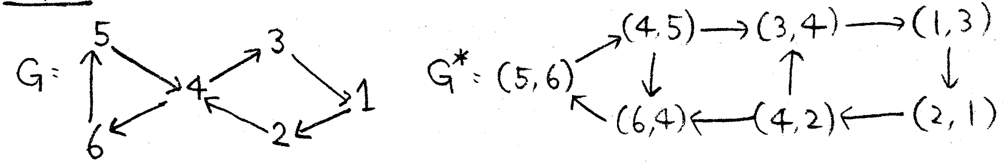
equivalentなものを取る。もし $u=(u_{ij})$ がunitary matrixであり、$u_{ij}=\delta_{ij}$ が $m+1\leq i,j\leq n$ について成り立つならば、α_u は、$\mathcal{O}_G$ 上のautomorphismに拡張出来る。更に、もしGがstrongly connectedならば、α_u は、$u\neq 1$ にたいして、outerである。

5 digraph上のfree categoryからみたCuntz-Krieger algebraのextensionとadjoint graph

この節では、Cuntz-Krieger algebraのextensionのもう1つの例を与える。その為に、まず、adjoint graphについて説明する。

digraph Gの<u>adjoint graph</u> G^* とは、Gのすべての1-paths $u_1, u_2, \cdots, u_m$ をverticesとし、Gにおいて u_i の終点が u_j の始点と一致するとき、そしてそのときに限り、点 u_i から点 u_j へのedgeをもつようなdigraphのことである。

例12



digraph Gが(I)条件をみたすとき、adjoint graph G^* も(I)条件をみたす。更に、次のことがadjoint graphについて成立する。

定理 $\mathcal{O}_G$ をCuntz-Krieger algebraとするとき、$\mathcal{O}_G = \mathcal{O}_{G^*}$.

Higgins [27] に従って, G を digraph とするとき, もし $D(G)$ をその morphisms が G のすべての paths からなり, またその objects が $\nabla(G)$ からなっている category であるとき, $D(G)$ を、G の free category とよぶ。 $s(g)$ を $g\in D(G)$ の source, $t(g)$ を g の target とする. $\ell^2(D(G))$ で orthonormal basis $\{e_d \,;\, d\in D(G)\}$ $\left(g\in D(G)\text{ に対して}, e_d(g)=\delta_{d,g}\right)$ をもつ $D(G)$ 上のすべての square summable sequence からなる Hilbert space を表わす。
また、各 $i\in\nabla(G)$ について, H_i を $\{e_d \,;\, d\in D(G), s(d)=i\}$ により生成された $\ell^2(D(G))$ の subspace とする。次に, $\ell^2(D)$ 上に $D(G)$ の left regular representation u を定義する。各 $g\in D(G)$ に対して、$\ell^2(D(G))$ 上の partial isometry u_g を,

$$u_g e_h = e_{gh}\ (s(g)=t(h)\text{ のとき}),\quad u_g e_h = 0\ (\text{そうでないとき})$$

で定義する。$\{u_g \,;\, g\in D(G)\}$ により生成された C^*-algebra を, $C^*_r(G)$ で表わすことにする。この時に,

$$u_g^* e_h = e_k\ (\text{もしある } k \text{ について}, h=gk \text{ のとき})$$

$$u_g^* e_h = 0\ (\text{そうでないとき})$$ なので,

すべての H_i は $C^*_r(G)$ のもとに invariant になる。そこで, $a\in C^*_r(G)$, $i\in\nabla(G)$ に対して, $\rho_i(a)=a|H_i$ とおくと, ρ_i は, H_i 上の $C^*_r(G)$ の表現であり, $\bigoplus_{i\in\nabla(G)}\rho_i$ は, $\ell^2(D(G))$ 上の $C^*_r(G)$ の identity representation である。

この表現を使うことにより, 次の定理を得る。

<u>定理</u>　この表現 ρ_i は、$C^*_r(G)$ に対して irreducible であり、$\rho_i(C^*_r(G))$ は compacts $C(H_i)$ を含む。更に、G が (I) 条件をみたせば、次の short sequence

$$0 \longrightarrow C(H_i) \longrightarrow \rho_i(C^*_r(G)) \longrightarrow \mathcal{O}_G \longrightarrow 0$$

は exact である。

$\boxed{6}$ <u>Weak extension group</u>

この節では、任意の finitely generated abelian group H に対して、separable, simple, unital C^*-algebra A で、$\mathrm{Ext}^w(A)$ が H に同型になるものが存在することを示す。実際には、simple Cuntz-Krieger algebra $\mathcal{O}_G$ が、A として取れる。

$\mathcal{Q}(H)$ で、infinite dimensional separable Hilbert space H 上の Calkin algebra を表わす。π を $B(H)$ から $\mathcal{Q}(H)$ への quotient map とする。separable C^*-algebra A の extension とは、A から $\mathcal{Q}(H)$ への star monomorphism のことである。２つの extensions ρ, σ が weakly equivalent とは、$\rho(x) = U\sigma(x)U^*$ をみたす partial isometry $U \in \mathcal{Q}(H)$ が存在するときにいう。extensions の weak equivalence classes の set を、$\mathrm{Ext}^w A$ で表わす。Cuntz-Krieger [10] は、$\mathrm{Ext}^w \mathcal{O}_G$ を次のように決定した。

<u>定理</u>(Cuntz-Krieger)　$\mathcal{O}_G$ の weak extension group は、$\mathbb{Z}^n/(1-G)\mathbb{Z}^n$ に同型である。(ここで、$\mathbb{Z}$ は有理整数全体、n は $V(G)$ の個数)

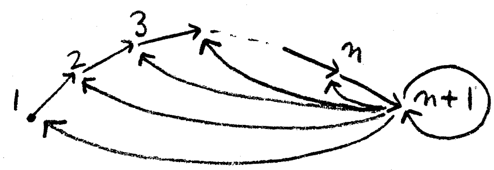
このCuntzとKriegerの結果を使って、次の定理を得る。

<u>定理</u>　Hをfinitely generated abelian groupとする。このとき、simple Cuntz-Krieger algebra $\mathcal{O}_G$で、$\mathrm{Ext}^{w}\mathcal{O}_G = H$をみたすものが存在する。

証明は、$H = \mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_{n(1)}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{n(m)}$とかけることを使って、以下のように、帰納的に行なえばよい。

<u>補題1</u>

$$G(n) = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{n+1}\Big\}\, n+1$$



とすると、この時、$\mathrm{Ext}^{w}\mathcal{O}_{G(n)} = \mathbb{Z}_n \ (n \geq 1)$

<u>補題2</u>

$$G(k|n) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & & & 1 & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & \cdots & 1 & \multicolumn{2}{c}{} \\ & \vdots & & \multicolumn{2}{c}{G(n)} \\ 1 & \cdots & 1 & & \\ 0 & \cdots & 0 & & \end{array}\right)$$

（上段の行数 k）

この時、$\mathrm{Ext}^{w}\mathcal{O}_{G(k|n)} = \underbrace{\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{k}\oplus\mathbb{Z}_n$

<u>補題3</u>

$$G(m,n) = \left(\begin{array}{c|c} G(m) & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & G(n) \end{array}\right)$$

この時、$\mathrm{Ext}^{w}\mathcal{O}_{G(m,n)} = \mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n$

$\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n$ に対応する matrix は,

$$\left(\begin{array}{c|c|c}
\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} & \begin{matrix} & 1 & 0 \\ & \vdots & \vdots \\ & 1 & 0\end{matrix} & \begin{matrix}1 & \\ \vdots & \\ 1 & \end{matrix} \\ \hline
\begin{matrix}1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0\end{matrix} & G(m) & \begin{matrix}1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 1\end{matrix} \\ \hline
 & \begin{matrix} & 1 \\ & \vdots \\ & 1 \\ & 0\end{matrix} & G(n)
\end{array}\right)$$

である。

$\boxed{7}$ 3×3 行列に対する simple Cuntz-Krieger algebra の分類

この節では, Cuntz-Krieger algebras $\mathcal{O}_G$ の分類理論を試みる。K_0-group を用いて, $\mathcal{O}_G$ は粗く分類されるが, 我々は K_0-group の精密化である marker の概念を使って, 3×3 行列の場合には, $\mathcal{O}_G$ が完全に分類出来ることを示す。最初に, K_0-group の定義を述べる。K で infinite-dimensional separable Hilbert space 上の compact operators の C^*-algebra を表わす。p, q を C^*-algebra A の projections とする。$x\in A$ が存在して, $x^*x=p$, $xx^*=q$ のとき, $p\sim q$ とかく。$[p]$ で, この同値関係による p の同値類を表わす。この時, $S\equiv\{[p];\ p$ は $K\otimes A$ の projection$\}$ とおくと, S は, 加法 $[p]+[q]\equiv[p'+q']$ (ここで, p', q' は, $p'\in[p]$, $q'\in[q]$ であり, $p'q'=0$ なる projections である) をもつ commutative semigroup である。

$K\otimes A$ の projections p, q については, これらの性質をみたす

p', q' をみつけることは，常に可能である。そして，$[p'+q']$ は、p', q' のとり方によらない。もしAがunitをもつとき，$K_0(A)$ はこのsemigroupのGrothendieck groupとして定義される。ところが，unitをもつpurely infinite simple C^*-algebra Aに対しては，$K_0(A)=\{[p] \mid p$ はAのnon-zero projection$\}$ になることが知られている。

Aの元とする必要がない

この $K_0(A)$ に関係して，新しいinvariantsを導入する。Aをunital C^*-algebra, $\mathrm{Aut}\,K_0(A)$ を $K_0(A)$ のautomorphism groupとする。$g, h \in K_0(A)$ とするとき，ある $\alpha \in \mathrm{Aut}\,K_0(A)$ に対して、$g=\alpha(h)$ となるとき，$g \sim h$ とかくことにする。$K_0(A)^{\sim} = K_0(A)/\sim$ とおき，$g \in K_0(A)$ について，$g^{\sim}$ でこの同値関係によるgの同値類を表わすことにする。この時，Aの<u>marker</u>を，$[1]^{\sim}$ で決める。ここで，$[1]$ は，$1 \in A$ の $K_0(A)$ へのimbeddingである。記号的に，$\mathrm{mark}(A)=[1]^{\sim}$ とかく。この量について次が成り立つ。

<u>定理</u>　AとBをunital C^*-algebraとする。もしAとBが同型ならば，その時，$K_0(A)=K_0(B)$ であり，$\mathrm{mark}(A)=\mathrm{mark}(B)$ である。

更に，matrix algebra M_K のtensor productのFのmarkerのtranslationsを調べる。$x^{\sim} \in K_0(A)^{\sim}$ について，kをintegerとするとき，$k \cdot x^{\sim}$ を $(kx)^{\sim}$ で定義する。この $k \cdot x^{\sim}$ は，$x^{\sim}$ の表

現によらないから，well-definedである。次が成り立つ。

<u>定理</u>　unital C^*algebra Aに対して，$\mathrm{mark}(A\otimes M_k)=k\cdot\mathrm{mark}(A)$.

この定理の系として，次を得る。

<u>系1</u>　もし $K_0(A)=\mathbb{Z}_n$，$\mathrm{mark}(A)=1^\sim$とすると，

$\mathrm{mark}(\mathcal{O}_n\otimes M_k)=k^\sim\ (2\leq n\leq\infty)$　(ここで，$\mathbb{Z}_\infty=\mathbb{Z}$)

<u>系2</u> (Paschke-Salinas)

もし$(n-1)$とkが互いに素でなければ，$\mathcal{O}_n\otimes M_k$と$\mathcal{O}_n$は同型にならない。

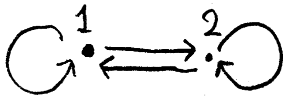
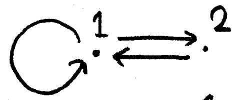
$\boxed{\text{注意}}$　<u>以下，digraphはすべてstrongly connectedとする。</u>

つまり，simple Cuntz-Kriegen algebraの分類問題を考える。その前に，道具を準備する。

<u>定義</u>　Gをdigraphとして，$\Gamma^-(i)=\{j\in V(G);\ j\to i\}$とおく。ある$k\neq m\in V(G)$に対して，$\Gamma^-(k)=\Gamma^-(m)$と仮定する。この時，$k$から$m$への<u>transfered</u> graph $H=G(k\to m)$を次で定義する。$V(H)=V(G)$として，$E(H)=(E(G)\setminus\{(m,i)\in E(G);\ i\in V(G)\})\cup\{(m,k)\}$とする。$H=G(k\to m)$のadjacency matrix Bは次のようになる。AをGのadjacency matrixとして，A_iをAのi-th row vectorとする。そうすると，$\Gamma^-(k)=\Gamma^-(m)$は，$A_k=A_m$のことより，

$$B(i,j)=\begin{cases}A(i,j) & (i\neq m)\\ \delta_{k,j} & (i=m).\end{cases}$$

簡単の為，このことを，$A \underset{\langle A_k \to A_m \rangle}{\Longrightarrow} B$ でかくことにする。

<u>例</u>  $\Longrightarrow$ 

$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ $\langle A_1 \to A_2 \rangle$ $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$

<u>定理</u>　k から m への digraph G の transfered graph を $H=G(k\to m)$ とする。この時，Θ_H は Θ_G と同型である。

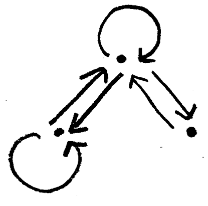
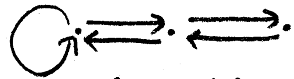
更に，transfered graph の定義を一般化する。

<u>定義</u>　A を 0–1 matrix とする。$E_i=(0,\cdots,0,\overset{i}{1},0,\cdots,0)$ とおく。相異なる $k(1),k(2),\cdots,k(r),m(1),\cdots,m(s)$ で，$p\notin\{m(1),\cdots,m(s)\}$ に対して，$A_p=E_{k(1)}+\cdots+E_{k(r)}+A_{m(1)}+\cdots+A_{m(s)}$ とする。この時，$n\times n$ matrix B を次で定義する。

$$B(i,j)=\begin{cases} A(i,j) & (i\neq p) \\ 1 & (i=p\text{ で，}j\in\{k(1),\cdots,k(r),m(1),\cdots,m(s)\}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}). \end{cases}$$

この B のことを，A を <u>primitively</u> に <u>transfer</u> したものという。これを，$A \underset{prim}{\Longrightarrow} B$ 又は，$A \xLongrightarrow[E_{k(1)}+\cdots+E_{k(r)}+A_{m(1)}+\cdots+A_{m(s)}\to A_p]{} B$

とかく。

<u>例</u>  $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ $\xRightarrow[A_2+E_3\to A_1]{}$  $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

primitive transformation '$\underset{prim}{\Longrightarrow}$' により生成される同値関係を, primitive equivalence $\underset{prim}{\approx}$ とよぶ。ここで, $A \underset{prim}{\approx} B$ とは, $C_1, \cdots, C_k$ が存在して, $A \underset{prim}{\Longleftrightarrow} C_1 \underset{prim}{\Longleftrightarrow} C_2 \underset{prim}{\Longleftrightarrow} \cdots\cdots \Longleftrightarrow C_k \underset{prim}{\Longleftrightarrow} B$

($C \underset{prim}{\Longleftrightarrow} D$ は, $C \underset{prim}{\Longrightarrow} D$ か $D \underset{prim}{\Longrightarrow} C$ のことを意味する)

transfered graph の定理の拡張が, 成り立つ。

<u>定理</u>　A と B が primitive equivalent であれば, $\mathcal{O}_A$ と $\mathcal{O}_B$ は同型である。

以上の準備のもとで, 3×3 irreducible matrices A に対する Cuntz Krieger algebras $\mathcal{O}_A$ を分類することが出来る。

<u>定理</u>　A と B を 3×3 irreducible matrices とする。この時, 次は同値である。

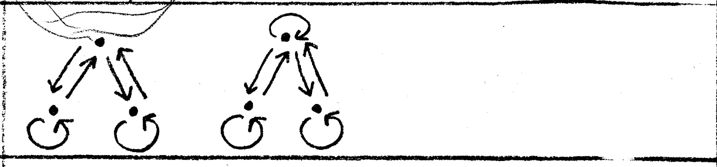
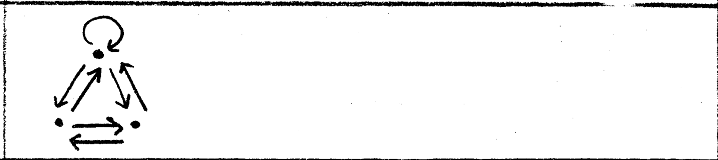
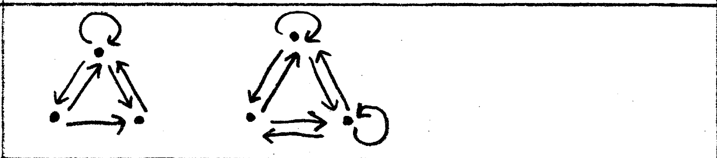
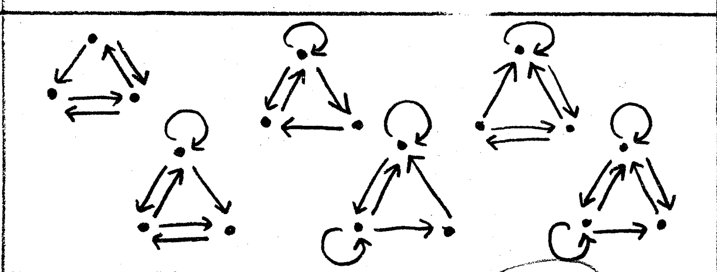
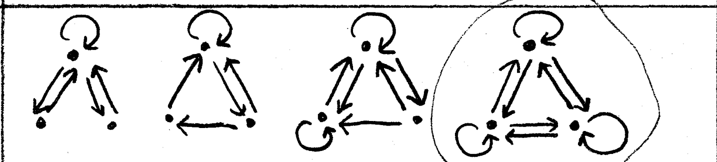
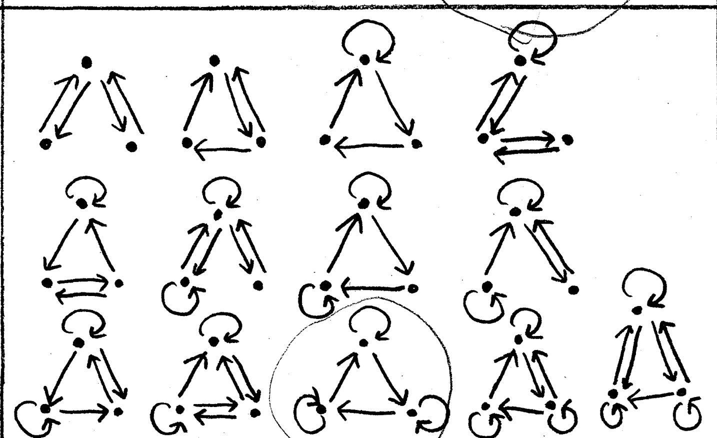
(1) A と B は primitive equivalent である。

(2) $\mathcal{O}_A$ と $\mathcal{O}_B$ は同型である。

(3) $K_0(\mathcal{O}_A) = K_0(\mathcal{O}_B)$, $\mathrm{mark}(\mathcal{O}_A) = \mathrm{mark}(\mathcal{O}_B)$

次に, この結果を分類表の形にまとめてみる。

分類表

K_0	marker	digraph	代表
$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\bar{0}$		
$\mathbb{Z}$	$\bar{0}$		
$\mathbb{Z}_4$	$\bar{2}$		$\mathcal{O}_5 \otimes M_2$
$\mathbb{Z}_3$	$\bar{1}$		$\mathcal{O}_4$
$\mathbb{Z}_2$	$\bar{0}$		$\mathcal{O}_3 \otimes M_2$
	$\bar{1}$		$\mathcal{O}_3$
0	$\bar{0}$		$\mathcal{O}_2$

Parry と Sullivan は，det(1−A) が，transition matrix A をもつ topological Markov chains の flow equivalence の topological invariant であることを示した。Cuntz-Krieger[10] は，次のことを証明している。(1) もし transition matrices A，B をもつ topological Markov chains T，S が flow equivalent であるならば，その時，Cuntz-Krieger algebras $\mathcal{O}_A$ と $\mathcal{O}_B$ は，stable isomorphic である。(2) もし $\mathcal{O}_A$ と $\mathcal{O}_B$ が stable isomorphic であるならば，その時，$|\det(1-A)|=|\det(1-B)|$ である。

私的な会話で，Cuntz は我々に次の興味ある問題を提出してくれた。<u>Cuntz-Krieger algebra $\mathcal{O}_A$ に対して，det(1−A) は，stable isomorphic invariant であるか？</u>

この問題について我々は，反例を見つけた。それは，3×3 matrix に対する我々の分類定理による。結局，その定理から，次の系が出る。

<u>系</u> $\mathcal{O}_A$ と $\mathcal{O}_B$ が同型ではあるが，$\det(1-A)\neq\det(1-B)$ であるような matrices A，B が存在する。

証明は，$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ を取ればよい。

この時，$K_0(\mathcal{O}_A)=K_0(\mathcal{O}_B)=0$．定理から，$\mathcal{O}_A$ と $\mathcal{O}_B$ は同型である。ところが，$\det(1-A)=1\neq-1=\det(1-B)$．

注意　上の系は，"real" C*algebra $\mathcal{O}_A$ についても成立する。

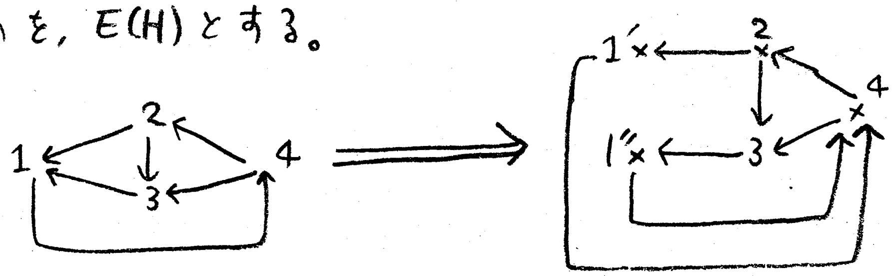
8 補遺

digraphのadjointの一般化として，explosionというものが考えられる。

定義　Gをdigraphとする。$\Gamma^-(i)=\{j\in V(G): i\leftarrow j\}$の個数が，ある$i\in V(G)$に対して，2よりも大きいとする．($i=1$とする)．$\Gamma^-(1)=V\cup W$と分解する。この時，Gの1でのexplosion H（VとWに関する）とは，次のものである。

$V(H)=(V(G)\setminus\{1\})\cup\{v_0,w_0\}$, $E(H)=(E(G)\setminus\{(1,j),(k,1);\ j,k\in V(G)\}\cup\{(v_0,v),(w_0,w);\ v\in V\setminus\{1\}, w\in W\}\cup\{(m,v_0),(m,w_0);\ v\in V, w\in W, m\in\Gamma^+(1)\}$となるものである。ただし、もし$1\in V$ならば，E(H)に$\{(v_0,v_0),(v_0,w_0)\}$をつけ加えたものを，E(H)とする。

例



定理　Hをdigraph Gのexplosionとすると，この時，$\mathcal{O}_H=\mathcal{O}_G$である。

(ただし，この操作のくり返しも，explosionとよぶ。)

REFERENCES.

[1] R.J.Archbold, On the 'flip-flop' autoromphism of $C^*(S_1,S_2)$, Quart. J. Math., Oxford, (2), 30(1979), 129-132.

[2] C.Berge, Graphs and Hypergraphs, North Holland, 1973.

[3] O.Bratteli, Inductive limits of finite-dimensional C*-algebras, Trans. Amer.Math. Soc., 17(1972), 195-234.

[4] J.Cuntz, Simple C*-algebras generated by isometries, Commun. Math. Phys., 57(1977), 173-185.

[5] ———, A class of C*-algebras and topological Markov chains II: Reducible Markov chains and the Ext-functor for C*-algebras, Preprint.

[6] ———, K-theory for certain C*-algebras, to appear in Ann. Math.

[7] ———, K-theory for certain C*-algebras II, to appear in J. Operator Theory.

[8] ———, Automorphisms of certain simple C*-algebras, Preprint.

[9] ——— and D.E.Evans, Some remarks on the C*-algebras assciated with certain topological Markov chains, Preprint.

[10] ——— and W.Krieger, A class of C*-algebras and topological Markov chains, Invent. Math., 56(1980), 251-268.

[11] M.Enomoto, M.Fujii and R.Ichihara, The weak extension groups of Cuntz-Krieger algebras, to appear in Math. Japon.

[12] ———, ———,H.Takehana and Y.Watatani, Automorphisms on Cuntz algebras II, Math. Japon., 24(1979), 463-468.

[13] ———, H.Takehana and Y.Watatani, Automorphisms on Cuntz algebras, Math. Japon., 24(1979), 231-234.

[14] ———,——— and ———, C*-algebras on free semigroups as extensions of Cuntz algebras, Math. Japon., 24(1980), 527-531.

[15] M.Enomoto and Y.Watatani, A graph theory for C*-algebras, Math. Japon., 25(1980), in press.

[16] ——————, Young diagrams and C*-algebras, to appear in Math. Japon.

[17] D.E.Evans, On O_n, Preprint.

[18] M.Fujii, On extensions of the Cuntz algebra, Math. Japon., 24(1980), 537-539.

[19] ——— and Y.Watatani, Cuntz-Krieger algebras assciated with adjoint graphs, Math. Japon., 25(1980), in press.

[20] D.Olesen and G.K.Pedersen, Some C*-dynamical systems with a single KMS state, Math. Scad., 42(1978), 111-118.

[21] O.Ore, Theory of Graphs, Amer. Math Soc. Colloquium Publ. 38, 1962.

[22] W.Paschke and N.Salinas, Matrix algebras over O_n, Michigan Math. J., 26(1979), 3-12.

[23] G.K.Pedersen, C*-algebras and Their Automorphism Groups, London Math. Soc. Mono., 14, Academic Press, 1979.

[24] M.Pimsner and S.Popa, The Ext-groups of some C*-algebras considered by J.Cuntz, Rev. Roum.Math. Pures Appl., 23(1978), 1076-1096.

[25] Y.Watatani, Clifford C*-algebras, Math. Japon., 24(1980), 533-536.

[26] M.Pimsner and D.Voiculescu, Imbedding the irrational rotation C*-algebra into an AF-algebra, Preprint.

[27] P.J.Higgins, Categories and Groupoids, Van Nostrand, 1971.